

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Четырехмерная геометрия и топология
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: С. Ким, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Данный курс посвящен четырехмерному пространству, под которым понимается математический объект, обобщающий свойства трехмерного пространства. Его не следует путать с четырехмерным пространством-временем теории относительности (пространством Минковского). Алгебраически четырехмерное пространство может быть построено как множество векторов с четырьмя вещественными координатами. Геометрически в простейшем случае четырехмерное пространство рассматривается как евклидово пространство четырех измерений, в более общем рассмотрении оно имеет неевклидову метрику, переменную от точки к точке. Именно этому посвящен данный курс.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Цель заключается в систематизации знаний по четырехмерной геометрии, освоение основных понятий.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теории узлов
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории узлов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории узлов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

гипотезу Пуанкаре  
основные теоремы курса;

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение.

владеть:

навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
предметным ясным понятиями четырехмерной геометрии и топологии

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Гипотеза Пуанкаре	2	2		9
2	Топологические 4-мерные многообразия и $h$ -кобордизмы	4	4		10
3	Инвариант раскрашенных узлов	6	6		12
4	Канонический класс	2	2		10
5	Топологическая классификация Фридмана	8	8		16
6	Эллиптические поверхности. Инварианты	8	8		18
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Гипотеза Пуанкаре

Дормулировка, схема доказательства. Обобщённая гипотеза Пуанкаре

##### 2. Топологические 4-мерные многообразия и $h$ -кобордизмы

Топологические 4-мерные многообразия и  $h$ -кобордизмы, Ручки Кассона, Теорема Фридмана.

##### 3. Инвариант раскрашенных узлов

Форма пересечения, Signature,  $K3$  поверхность (The intersection form. Signatures. The  $K3$  surface.). Теорема Уайтхеда, (The Whitehead theorem). Теорема Рохлина (Rokhlin's theorem).

##### 4. Канонический класс

Канонический класс, Серре классификация форм.

##### 5. Топологическая классификация Фридмана

Топологическая классификация Фридмана, Нереализуемая форма гладкими многообразиями, Гладкие структуры Комплексная геометрия. Классификация Енрикс-Кодаира

##### 6. Эллиптические поверхности. Инварианты

Эллиптические поверхности. Инвариант Доналдсона. Инвариант Зейберга-Виттена. Калибровочная инвариантность

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Электронный ресурс] : [учебник] / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн .— 4-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2005 .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).
2. Элементарная топология [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Я. Виро [и др.] .— М. : МЦНМО, 2010 .— 352 с. - Библиогр.: с. 350. - Предм. указ.: с. 351-355. - 1500 экз. - ISBN 978-5-94057-587-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

##### Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер пер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

учебная аудитория, экран и проектор.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	С. Ким, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Четырехмерная геометрия и топология» обучающийся должен:

**знать:**

гипотезу Пуанкаре  
основные теоремы курса;

**уметь:**

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение.

**владеть:**

навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
предметным ясным понятиями четырехмерной геометрии и топологии

**3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Контрольная работа (пример)

1. Вычислить число раскрасок в три цвета для трилистника. Показать, что трилистник нетривиален.
2. Построить минимальную диаграмму узла с 13 перекрестками.
3. Вычислить скобку Кауфмана (и полином Джонса) для восьмёрки.
4. Вычислить фундаментальные группы тора
5. Вычислить количество правильных раскрасок квандром  $(Z_{\{5\}}, *)$ ,  $a*b = 2b - a$  для трилистника и восьмерки.

**4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Примеры заданий к зачету:

1. Вычислить коэффициент зацепления для Уайтхеда.
2. Проверить, что при замене проходов на переходы в скобке Кауфмана происходит замена  $a \rightarrow -a$ ;
3. Посчитать скобку Кауфмана для левого трилистника.
4. Посчитать инвариант Конвея для восьмерки.
5. Найти представление фундаментальной группы правого трилистника.
6. Вычислить определитель узлов для  $5_1$ . Уточнить, что для какого простого числа  $p$  можно нетривиально раскрасить узел  $5_1$  квандром  $(Z_{\{p\}}, *)$ ,  $a*b = 2b - a$ .
7. Сформулировать теорему Александра и теорему Маркова. Преобразовать данную диаграмму в форму косы.
8. Вычислить примитивные элементы для алгебры хордовых диаграмм, в которых есть одночленные соотношения, для порядков 2 и 3.

**Критерии оценивания**

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;



- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.